

SAŽETAK

U ovom radu je izvršena analiza odziva sustava s jednim stupnjem slobode gibanja u slučaju djelovanja periodičkog, impulsnog i neperiodičkog opterećenja.

U slučaju periodičkog opterećenja analiza je provedena dvijema metodama matematičkom i numeričkom.

Uslijed impulsnog opterećenja analiziran je slučaj kratkotrajnog opterećenja.

U slučaju neperiodičkog opterećenja odziv je određen upotrebom numeričkog rješenja Duhamelovog integrala.

Svi proračuni su provedeni pomoću računalnog programa Mathcad 14.

SADRŽAJ

SAŽETAK	1
POPIS SLIKA I TABLICA	3
Popis tablica	3
Popis slika	3
POPIS OZNAKA	4
IZJAVA	5
 1. PERIODSKE VIBRACIJE	 6
1.1. Uvod	6
1.2. Analiza vibriranja sustava	8
1.2.1. Matematička metoda	9
1.2.2. Numerička metoda	12
 2. IMPULSNE VIBRACIJE	 16
2.1. Uvod	16
2.2. Približni postupak određivanja kratkotrajne impulsne sile	17
2.3. Analiza vibriranja za zadani oblik sile uzbuđe	18
 3. NEPERIODSKE VIBRACIJE	 27
3.1. Uvod	27
3.2. Numeričko rješenje Duhamelovog integrala	27
3.3. Analiza odziva za slučaj neperiodičkog opterećenja	29
 4. ZAKLJUČAK	 32
LITERATURA	33

POPIS SLIKA I TABLICA

Popis tablica

Tablica 1.1 Rezultati harmonijske analize sila i odziva	10
Tablica 1.2 Vrijednosti funkcije $f(t)$ u nekoliko vremenskih odsječaka	14
Tablica 1.3 Izračunate vrijednosti koeficijenata F_{ak} i F_{bk} za $k = 1, 2, 3, 4$	15
Tablica 1.4 Odziv u slučaju neperiodičke sile uslijed djelovanja prigušenja	30

Popis slika

Slika 1.1 Periodska uzbuda	8
Slika 1.2 Graf razvijenog reda svih harmonijskih komponenti sile $F_{n5}(t)$	10
Slika 1.3 Graf prvog harmonika sile $F_{n1}(t)$	10
Slika 1.4 Graf odziva $x(t)$ razvojem u red svih harmonika	11
Slika 1.5 Harmonici funkcije $F_{k1}(t)$ i $F_{k4}(t)$	15
Slika 1.6 Impulsno opterećenje	18
Slika 1.7 Promjena odziva u fazi I_1	20
Slika 1.8 Promjena odziva u fazi I_2	23
Slika 1.9 Odziv sustava u fazi II	25
Slika 1.10 Neperiodsko opterećenje	29
Slika 1.11 Grafički prikaz sile i odziva	31

POPIS OZNAKA

PRVI DIO – Periodske vibracije

k	- krutost elastičnog elementa, $\frac{N}{m}$
t	- vrijeme, s
T	- period harmonijskih vibracija, s
T_F	- period periodske sile uzbude, s
$x(t)$	- vibracijski pomak, m
x_{an}, x_{bn}	- koeficijent odziva sustava razvijene u Fourierov red, m
$F(t)$	- sila uzbude, N
F_0	- amplituda sile uzbude, N
F_{sr}, F_{an}, F_{bn}	- koeficijent periodske sile uzbude razvijene u Fourierov red, N
$F_{nI}(t)$	- prvi harmonik Fourierovog red, N
$F_{nS}(t)$	- peti harmonik Fourierovog reda, N
λ_1	- frekvencija periodske sile uzbude, Hz
λ_n	- frekvencija n-tog harmonika periodske sile uzbude, Hz
ω	- prirodna frekvencija sustava, Hz
α_n	- koeficijent dinamičnosti n-tog harmonika periodske sile uzbude
β_n	- omjer frekvencije uzbude i prirodne frekvencije n-tog harmonika periodske sile uzbude
ζ	- bezdimenzijski koeficijent prigušenja

DRUGI DIO – Impulsne vibracije

A, B, C, D	- koeficijenti odzivnih funkcija
a, b	- koeficijenti pravca
k	- krutost elastičnog elementa, $\frac{N}{m}$
t	- vrijeme, s
t_1	- vrijeme djelovanja impulsne sile, s
T	- period harmonijskih vibracija, s
τ	- vrijeme nakon prestanka djelovanja impulsne sile, s
$x_I(t)$	- odziv u fazi I tijekom djelovanja impulsne sile, m
$x_{II}(t)$	- odziv u fazi II nakon prestanka djelovanja impulsne sile, m
$x_p(t)$	- partikularni dio odziva $x_I(t)$, m
$X_{I\max}$	- maksimalna amplituda u fazi I tijekom djelovanja impulsne sile, m
$X_{II\max}$	- maksimalna amplituda u fazi II nakon prestanka djelovanja impulsne sile, m
F_0	- amplituda sile uzbude, N
$F(t)$	- sila uzbude, N

TREĆI DIO – Neperiodske vibracije

m	- masa, kg
x_{an}, x_{bn}	- pđintegralne vrijednosti Duhamelovog integrala
M	- broj vremenskih odsječaka
$\Delta\tau$	- vremenski odsječak

IZJAVA

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila u cijelosti sama uz stručnu pomoć mentora prof. dr. sc Rajka Grubišića, kojem se ovim putem ujedno i zahvaljujem.

1. PERIODSKE VIBRACIJE

1.1 Uvod

Brod kao proizvod predstavlja vrlo složen sustav u koji je integrirano visoko znanje, napredna tehnologija, te visoka financijska ulaganja. Upravo taj posljednji faktor uvjetuje ekonomsku opravdanost samog projekta, uz nužno ispunjen uvjete kvalitete i sigurnosti. Kako bi opravdali velika financijska ulaganja, potrebno je projektirati brod koji će biti u stanju ispunjavati svoju zadaću, a istovremeno će udovoljavati kriteriju sigurnosti. Poznavanje opterećenja kojima je brodska konstrukcija izložena tijekom svoje eksploatacije vodi prije svega analizi dinamičkih opterećenja.

Dinamička opterećenja se s obzirom na posljedice u službi broda mogu promatrati kao opterećenja niske, srednje i visoke učestalosti. Opterećenja visoke učestalosti kao što su udaranje pramca o valove, prisilne (mehaničke) vibracije uzrokovane radom glavnog i pomoćnih motora, promjene tlaka uslijed rada brodskog vijka, te pružanje broda iziskuju najveći oprez jer su njihove posljedice najdalekosežnije, a samim time i najštetnije.

Prvi dio rada odnosi se na analizu periodskih vibracija koje su posljedica rada pogonskog stroja, rada brodskog vijka, te rotacije osovinskog voda. U radu je izvršena analiza odziva sustava s jednim stupnjem slobode s prigušenjem u slučaju djelovanja periodskog opterećenja do petog harmonijskog reda.

Prvi korak u analizi ovakvih sustava jest prikazati silu $f(t)$ razvojem u Fourierov red. Odziv uslijed svakog člana reda je odziv uslijed harmonijske uzbude, a prema načelu superpozicije ukupni odziv je zbroj odziva uslijed svakog člana reda posebno.

Razvoj u Fourierov red glasi, lit 1,

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_{an} \cos \frac{2\pi n}{T_F} t + \sum_{n=1}^{\infty} F_{bn} \sin \frac{2\pi n}{T_F} t \quad (1.1)$$

gdje je T_F - period uzbude, a koeficijenti reda glase,

$$F_0 = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} f(t) dt \quad (1.2)$$

$$F_{an} = \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T_F} t dt \quad (1.3)$$

$$F_{bn} = \frac{2}{T_F} \int_0^{T_F} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T_F} t dt \quad (1.4)$$

Odziv određujemo po harmonijskim komponentama za svaki član reda. Slijedi

$$\text{za član } F_0 \quad x_0 = \frac{F_0}{k} \quad (1.5)$$

$$\text{za sinusni član} \quad F_{bn} \frac{\alpha_n^2}{k} \left[(1 - n^2 \beta^2) \sin n\lambda t - 2\xi n\beta \cos n\lambda t \right] \quad (1.6)$$

$$\text{za kosinusni član} \quad F_{an} \frac{\alpha_n^2}{k} \left[2\xi n\beta \sin n\lambda t + (1 - n^2 \beta^2) \cos n\lambda t \right] \quad (1.7)$$

$$\text{gdje } \alpha_n \text{ izračunavamo prema formuli } \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2 \beta^2)^2 + (2\xi n\beta)^2}}, \quad (1.8)$$

$$\text{a } \beta = \frac{\lambda}{\omega}. \quad (1.9)$$

Ukupni ustaljeni odziv prigušenog sustava za periodičku silu glasi

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{an} \cos n\lambda t + x_{bn} \sin n\lambda t), \quad (1.10)$$

gdje je

$$x_{an} = \alpha_n^2 \left[\frac{F_{an}}{k} (1 - n^2 \beta^2) - \frac{F_{bn}}{k} 2\xi n\beta \right] \quad (1.11)$$

$$x_{bn} = \alpha_n^2 \left[\frac{F_{an}}{k} 2\xi n\beta + \frac{F_{bn}}{k} (1 - n^2 \beta^2) \right] \quad (1.12)$$

1.2 Analiza vibriranja sustava

Zadane su slijedeće vrijednosti za vibracijski sustav :

$$k = 1500 \text{ N / m}$$

$$m = 25 \text{ kg}$$

$$\xi = 0,05$$

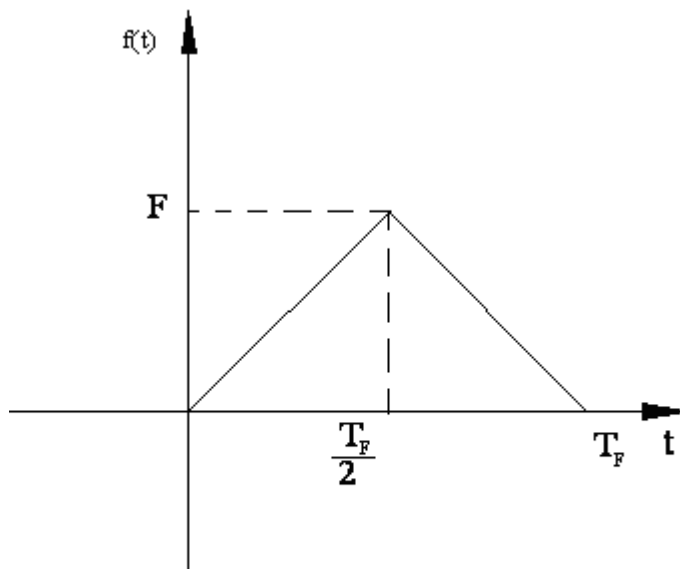
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3,14 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$$

$$T_F = \frac{3}{2} T = 3 \text{ s}$$

$$F = 100 \text{ N}$$

U slučaju periodičkog opterećenja, vidi sliku 1.1,



Slika 1.1. *Periodska uzbuda*

Potrebno je izvršiti harmonijsku analizu sile i odziva do petog (5.) harmonijskog reda. Kod analize odziva koristiti dvije metode: **matematičku** (analitičku) i **digitaliziranu** (numeričku).

1.2.1 Analiza vibriranja sustava matematičkom metodom

Zadana funkcija sile ima sljedeći oblik

$$0 \leq t \leq \frac{T_F}{2} \quad f(t) = \frac{2F}{T_F} t$$

$$\frac{T_F}{2} \leq t \leq T_F \quad f(t) = F - \frac{2F}{T_F} \left(t - \frac{1}{2} T_F\right)$$

Radi se simetričnoj funkciji, te prema izrazima (1.2), (1.3), (1.4) Fourierovi koeficijenti glase

$$F_0 = \frac{1}{T_F} \left[\int_0^{1,5} \frac{2F}{T_F} t dt + \int_{1,5}^3 \left[F - \frac{2F}{T_F} \left(t - \frac{1}{2} T_F\right) \right] dt \right] = 50,0 \text{ N}$$

$$F_{an} = \frac{2}{T_F} \left[\int_0^{1,5} \frac{2F}{T_F} t \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_F}\right) dt + \int_{1,5}^3 \left[F - \frac{2F}{T_F} \left(t - \frac{1}{2} T_F\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_F}\right) dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T_F} \left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{T_F} 1,5\right) - 1}{\left(\frac{2\pi n}{T_F}\right)^2} + \frac{3 \sin\left(\frac{2\pi n}{T_F} 3\right)}{\frac{2\pi n}{T_F}} - \frac{1,5 \sin\left(\frac{2\pi n}{T_F} 1,5\right)}{\frac{2\pi n}{T_F}} \right]$$

$$F_{bn} = \frac{2}{T_F} \left[\int_0^{1,5} \frac{2F}{T_F} t \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_F}\right) dt + \int_{1,5}^3 \left[F - \frac{2F}{T_F} \left(t - \frac{1}{2} T_F\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_F}\right) dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T_F} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T_F} 1,5\right)}{\left(\frac{2\pi n}{T_F}\right)^2} - \frac{3 \cos\left(\frac{2\pi n}{T_F} 3\right)}{\frac{2\pi n}{T_F}} + \frac{1,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{T_F} 1,5\right)}{\frac{2\pi n}{T_F}} \right]$$

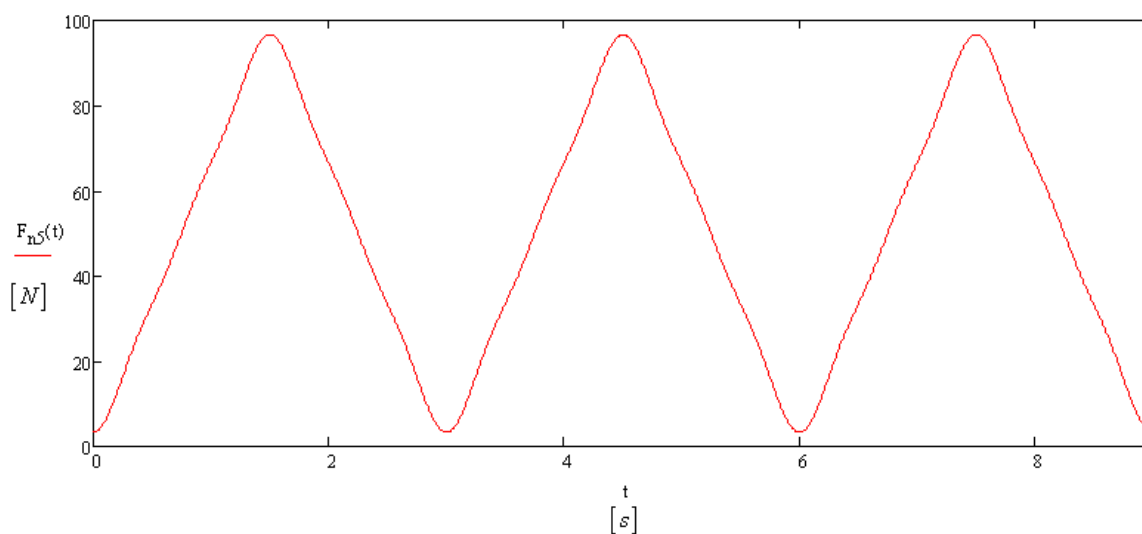
Uvrštavanjem zadanih vrijednosti, te uvrštavanjem $n = 1, 2, \dots, 5$, jer se traže vrijednosti za pet harmonika, dobivamo sljedeće rezultate, prikazane u tablici 1.1.

Tablica 1.1 Rezultati harmonijske analize sila i odziva

n	F_{an} [N]	F_{bn} [N]	β_n	α_n	x_{an} [m]	x_{bn} [m]
1	-40,528	0	0,667	1,789	-0,048	$-5,765 \cdot 10^{-3}$
2	0	0	1,334	0,163	0	0
3	-4,503	0	2,001	0,029	$8,566 \cdot 10^{-5}$	$-1,468 \cdot 10^{-6}$
4	0	0	2,668	$8,858 \cdot 10^{-3}$	0	0
5	-1,621	0	3,335	$3,609 \cdot 10^{-3}$	$3,901 \cdot 10^{-6}$	$-2,348 \cdot 10^{-8}$

Dobivene vrijednosti uvrštavamo u izraz (1.1) i tako dobivamo silu $F(t)$ prikazanu razvojem u red svojih harmonijskih komponenti (slika 1.2):

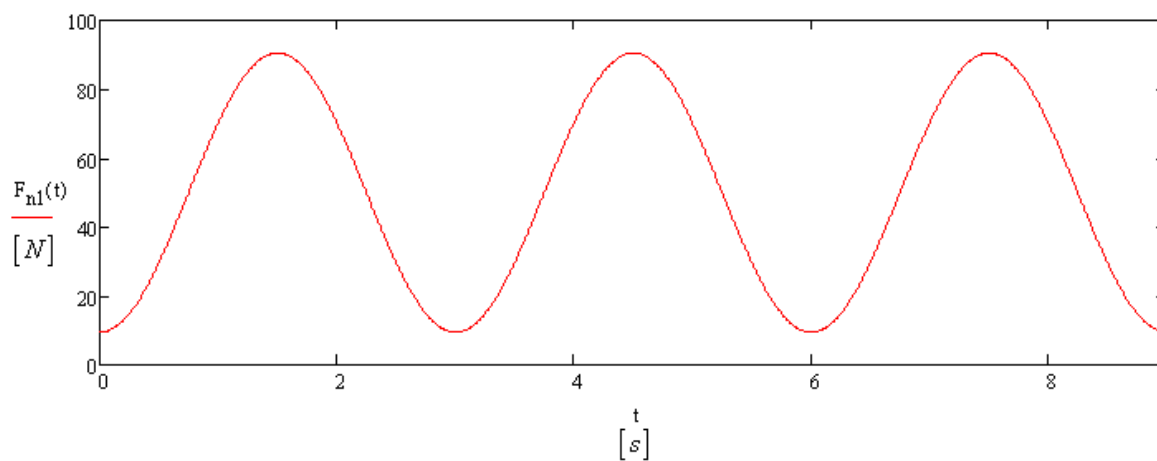
$$F_{n5}(t) = 50 - 40,528 \cos\left(\frac{2\pi}{T_F}t\right) - 4,503 \cos\left(\frac{2\pi 3}{T_F}t\right) - 1,621 \cos\left(\frac{2\pi 5}{T_F}t\right)$$



Slika 1.2 Graf razvijenog reda svih harmonijskih komponenti sile $F_{n5}(t)$

Prva harmonik sile $F(t)$ dobiven je po istom izrazu (1.1), (slika 1.3):

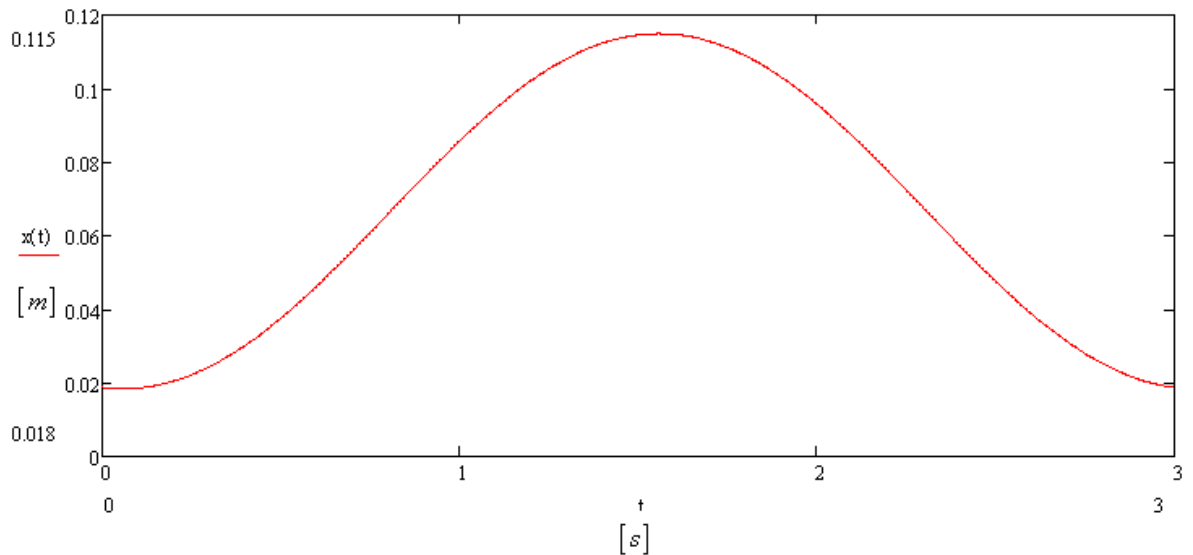
$$F_{n1}(t) = 50 - 40,528 \cos\left(\frac{2\pi}{T_F}t\right)$$



Slika 1.3 Graf prvog harmonika sile $F_{n1}(t)$

Odziv $x(t)$ prikazan razvojem svojih harmonijskih komponenti prema izrazu (1.10), prikazan je na slici (1.4):

$$x(t) = \frac{1}{15} - 0,048 \cos\left(\frac{2\pi}{T_F} t\right) - 5,765 \cdot 10^{-8} \sin\left(\frac{2\pi}{T_F} t\right) + 8,566 \cdot 10^{-5} \cos\left(\frac{2\pi 3}{T_F} t\right) - \\ - 1,468 \cdot 10^{-6} \sin\left(\frac{2\pi 3}{T_F} t\right) + 3,908 \cdot 10^{-6} \cos\left(\frac{2\pi 5}{T_F} t\right) - 2,348 \cdot 10^{-8} \sin\left(\frac{2\pi 5}{T_F} t\right)$$



Slika 1.4 Graf odziva $x(t)$ razvojem u red svih harmonika

Iz provedenog proračuna smo zaključili da kad $n \rightarrow \infty$ tada $\alpha \rightarrow 0$, drugim riječima faktor dinamičnosti opada s porastom rednog broja harmonika n sile uzbude. Ta spoznaja nam olakšava praktičnu primjenu prilikom rada s ograničenim brojem članova reda, a ujedno nam pruža relativno prihvatljive rezultate. [m]

1.2.2 Analiza vibriranja sustava numeričkom metodom

U praktičnoj primjeni često se javljaju sile i pomaci, koje nije moguće definirati matematički, već se one mjere. Periodska funkcija je tada dana u obliku digitalnog zapisa. Za određivanje Fourierovih koeficijenata vrši se približna harmonijska analiza, gdje se beskonačni Fourierov red zamjenjuje konačnim trigonometrijskim redom:

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t \right) \quad (1.13)$$

Za određivanje Fourierovih koeficijenata potrebno je promatrati vrijednosti funkcije x u m ekvidistantnih vremenskih odsječaka t_i , gdje je

$$t_i = \frac{(i-1)T}{m-1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad m \geq 2n+1 \quad (1.14)$$

U izraz (1.13) uvrštavamo sljedeće izraze

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(t_i), \quad (1.15)$$

$$a_k = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m f(t_i) \cos k \frac{i-1}{m-1} 2\pi \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

$$b_k = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m f(t_i) \sin k \frac{i-1}{m-1} 2\pi \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

Harmonijska analiza izmjerene funkcije sile $f(t)$ obuhvaća:

- određivanje vrijednosti funkcije $f(t)$ u m vremenski ekvidistantnih točaka unutar jednog perioda T
- određivanje Fourierovih koeficijenata F_0, F_{ak} i F_{bk} za pojedine harmonike
- prikaz funkcije sile $f(t)$ razvojem u red svojih harmonijskih komponenti

Kako bi izvršili harmonijsku analizu izmjerene funkcije $f(t)$ (u ovom slučaju do četvrtog harmonika, $n=4$), potrebno je poznavati vrijednosti funkcije za $m \geq 2n+1 = 9$ ekvidistantnih vremenskih točaka unutar perioda T , što je prikazano u tablici 1.2.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i/T	0	0,15	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$f(t_i) N$	0	25	50	75	100	75	50	25	0

Tablica 1.2. Vrijednosti funkcije $f(t)$ u nekoliko vremenskih odsječaka

Dalje slijedi određivanje Fourierovih koeficijenata prema izrazima (1.15), (1.16) i (1.17).

$$F_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F(t_i) = 44,44 N$$

$$F_{ak} = \frac{2}{m} \left\{ \begin{aligned} &0 \cos \left[2\pi k \frac{(1-1)}{m-1} \right] + 25 \cos \left[2\pi k \frac{(2-1)}{m-1} \right] + \\ &50 \cos \left[2\pi k \frac{(3-1)}{m-1} \right] + 75 \cos \left[2\pi k \frac{(4-1)}{m-1} \right] + \\ &100 \cos \left[2\pi k \frac{(5-1)}{m-1} \right] + 75 \cos \left[2\pi k \frac{(6-1)}{m-1} \right] + \\ &50 \cos \left[2\pi k \frac{(7-1)}{m-1} \right] + 25 \cos \left[2\pi k \frac{(8-1)}{m-1} \right] + \\ &0 \cos \left[2\pi k \frac{(9-1)}{m-1} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$F_{bk} = \frac{2}{m} \left\{ \begin{aligned} &0 \sin \left[2\pi k \frac{(1-1)}{m-1} \right] + 25 \sin \left[2\pi k \frac{(2-1)}{m-1} \right] + \\ &50 \sin \left[2\pi k \frac{(3-1)}{m-1} \right] + 75 \sin \left[2\pi k \frac{(4-1)}{m-1} \right] + \\ &100 \sin \left[2\pi k \frac{(5-1)}{m-1} \right] + 75 \sin \left[2\pi k \frac{(6-1)}{m-1} \right] + \\ &50 \sin \left[2\pi k \frac{(7-1)}{m-1} \right] + 25 \cos \left[2\pi k \frac{(8-1)}{m-1} \right] + \\ &0 \sin \left[2\pi k \frac{(9-1)}{m-1} \right] \end{aligned} \right\}$$

Dobivene izraze razvijamo u red za vrijednosti $k = 1, 2, 3, 4$, te su doniveni rezultati prikazani u tablici 1.3.

k	F_{ak}	F_{bk}
1	-37,936	$5,526 \cdot 10^{-15}$
2	0	0
3	-6,509	$-1,184 \cdot 10^{-14}$
4	0	0

Tablica 1.3 Izračunate vrijednosti koeficijenata F_{ak} i F_{bk} za $k = 1, 2, 3, 4$

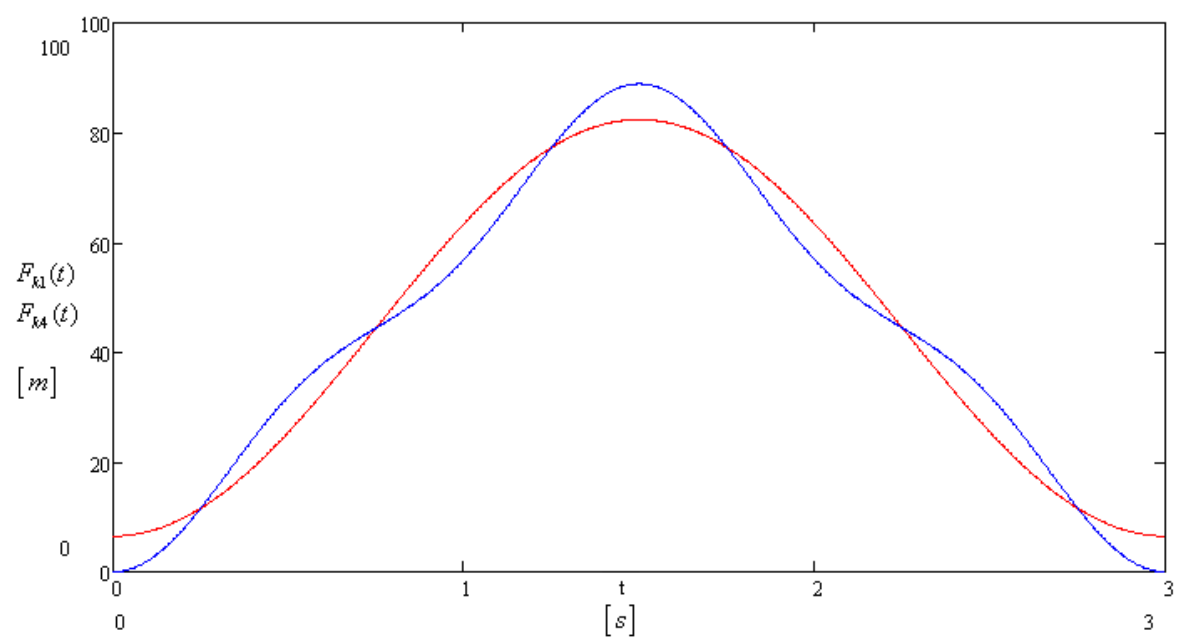
Vrijednosti koeficijenta F_{bk} trebala bi biti nula, no prema izračunu sve dobivene vrijednosti nisu nula. Vidljivo je da su neke vrijednosti vrlo male reda veličina 10^{-15} pa ih je moguće zanemariti, tj. uzima ih se da su jednake nuli.

Vrijednosti dobivene u tablici (1.3) uvrštavamo u izraz (1.13) te dobivamo razvoj zadane funkcije u Fourierov red:

$$F_{n1}(t) = 44,44 - 37,936 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 5,526 \cdot 10^{-15} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$F_{n4}(t) = 44,44 - 37,936 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 5,526 \cdot 10^{-15} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 1,184 \cdot 10^{-14} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \\ - 6,509 \cdot 10^{-14} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right)$$

Veličine $F_{n11}(t)$ i $F_{n14}(t)$ su prikazane grafički na slici 1.5.



Slika 1.5 Harmonici funkcije $F_{k1}(t)$ i $F_{k4}(t)$

2. IMPULSNE VIBRACIJE

2.1 Uvod

U ovom dijelu rada potrebno je izvršiti analizu impulsnog opterećenja prema zadanoj slici (1.6). Upravo ove sile imaju vrlo važnu ulogu u projektiranju određenih strukturnih sustava poput trupa podmornice.

Impulsne sile predstavljaju neperiodičke sile velike vrijednosti koje djeluju u vrlo kratkom vremenu, no u praksi ih je moguće opisati vrlo jednostavnim matematičkim izrazima, što bitno olakšava proračun. Najveći odziv, prilikom djelovanja ovakve sile pojavljuje se u vrlo kratkom vremenu, puno prije nego što sile prigušenja mogu apsorbirati veću energiju strukture, iz tog razloga prigušenje zanemarujemo.

Proračun sustava izloženih djelovanju impulsnih sila, može se podijeliti u dva dijela, lit 2. U prvoj fazi sustav je izložen djelovanju impulsne sile i sve to u nekom vremenu t_1 . Odziv u ovoj fazi vibriranja, biti će jednak sumi homogenog i partikularnog rješenja jednadžbe

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t)$$
$$x_I(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cos \omega t + x_p(t). \quad (1.18)$$

Partikularni dio funkcije x_p dobiva se iz funkcije impulsne sile. Konstante A i B određuju se iz početnih uvjeta sustava.

U drugoj fazi nakon prestanka djelovanja sile sustav ima slobodne vibracije, gdje će odziv ovisiti o početnim uvjetima u trenutku $t = t_1$ prema izrazu:

$$x_{II}(\tau) = C \cdot \sin \omega \tau + D \cdot \cos \omega \tau = X \cdot \sin(\omega \tau + \varphi), \quad (1.19)$$

gdje je uvedena nova vremenska varijabla $\tau = t - t_1$

$$C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx(t_1)}{dt} \quad (1.19 \text{ a})$$

$$D = x(t_1) \quad (1.19 \text{ b})$$

$$x_{II \max} = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (1.19 \text{ c})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Karakteristike odziva uslijed impulsne sile uzbude ovise o omjeru vremena djelovanja sile t_1 i prirodnog perioda vibriranja sustava T . U ovom poglavlju izvršeni su potrebni proračuni za slučaj kratkotrajne impulsne sile $t_1 / T \ll 0,25$.

2.2 Približni postupak određivanja kratkotrajne impulsne sile

U slučaju kratkotrajne impulsne sile, do maksimalnog odziva će doći u drugoj fazi, tj. nakon prestanka djelovanja sile i neće ovisiti o obliku sile uzbude, već samo o veličini njenog impulsa.

$$I = \int_0^{t_1} F(t) dt \quad (1.20)$$

Približni postupak određivanja odziva uslijed kratkotrajne impulsne sile temelji se na izrazu (1.20), kada u taj izraz uvrstimo jos i masu m dobiva se sljedeći izraz:

$$m \Delta \frac{dx}{dt} = \int_0^{t_1} [F(t) - kx(t)] dt. \quad (1.21)$$

Za slučaj kratkotrajne impulsne sile kad $t_1 \rightarrow 0$, pomak $x(t_1)$ je zanemarivo mali, pa je iz tog razloga u prethodnom izrazu zanemaren član $kx(t)$, te se na kraju dobiva približan izraz koji

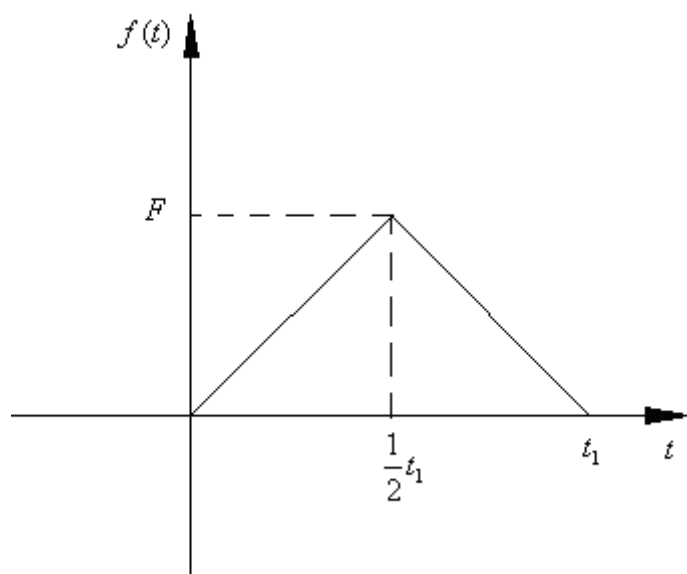
$$\text{glasi: } \Delta \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F(t) dt \quad (1.22)$$

Ako je na početku djelovanja impulsne sile sustav bio u mirovanju, tada je $\Delta \frac{dx}{dt} = \frac{dx(t_1)}{dt_1}$, te

$$\text{će izraz (1.22) prijeći u oblik: } x(\tau) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} F(t) dt \right) \sin \omega \tau. \quad (1.23)$$

2.3 Analiza vibriranja za zadani oblik sile uzbude

Ovdje će se prikazati analiza odziva dinamičkog sustava s jednim stupnjem slobode bez prigušenja koji je izložen djelovanju impulsne sile prema slici (1.6)



Slika 1.6 Impulsno opterećenje

Zadane su sljedeće vrijednosti:

$$F = 100 \text{ N}$$

$$t_1 = 0,4 \text{ s } (0,2 \cdot T)$$

$$m = 25 \text{ kg}$$

$$k = 1500 \text{ N/m}$$

$$\xi = 0,01$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3,14 \text{ s}^{-1}$$

Proračun se provodi na način da se zadana funkcija sile prikazana na slici 1.6 podijeli na dva dijela. Prvi dio koji obuhvaća period $0 \leq t \leq \frac{t_1}{2}$, u daljnjem proračunu označen

indeksom **1**, te drugi dio koji obuhvaća period $\frac{t_1}{2} \leq t \leq t_1$, u proračunu označen indeksom **2**.

I faza:

a) Proračun za prvi dio funkcije $0 \leq t \leq \frac{t_1}{2}$

$$x_{p1}(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + x_{p1} \quad (1.24)$$

Partikularni dio odziva u fazi I određuje se iz diferencijalne jednačbe vibracije sustava s jednim stupnjem slobode gibanja:

$$\frac{dx_{p1}^2(t)}{dt} + \omega^2 x_{p1}(t) = \frac{F_1(t)}{k} \omega^2 \quad (1.25)$$

gdje je

$$F_1(t) = \frac{2F}{t_1} t .$$

U ovoj fazi sustav je izložen djelovanju impulsne sile, pa se odziv određuje kao ukupno rješenje jednačbe $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ bez prigušenja, gdje je

$x_H(t)$ - homogeno rješenje jednačbe,

$x_p(t)$ - partikularno rješenje jednačbe.

Konstante integracije A i B iz izraza (1.24), određuju se na osnovu početnih uvjeta i prema značajkam impulsne sile sadržanima u x_p .

Pretpostavljeno rješenje glasi:

$$x_{p1}(t) = a_1 t + b_1 ,$$

iz čega slijedi :

$$\frac{dx_{p1}(t)}{dt} = a_1$$

$$\frac{d^2 x_{p1}(t)}{dt^2} = 0$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz (1.25) dobivene su vrijednosti koeficijenata a i b.

$$a_1 = \frac{2F}{kt_1} t$$

$$b_1 = 0$$

Konačno slijedi izraz : $x_{I1}(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + \frac{2F}{kt_1} t$.

Kako bi odziv u fazi I uslijed djelovanja impulsne sile $x(t)$ bio u potpunosti definiran, potrebno je odrediti koeficijente A_1 i B_1 , koji se određuju iz početnih uvjeta $x(0) = 0$ i

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0, \text{ uz uvjet da nema prigušenja } (\xi = 0).$$

$$\text{Za } t = 0 \Rightarrow x_{I1}(0) = B_1 \Rightarrow B_1 = 0.$$

$$\text{Za } t = 0 \Rightarrow \frac{dx_{I1}(0)}{dt} = A_1 \omega + \frac{2F}{kt_1} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{2F}{\omega kt_1} = -0,106 \text{ m}.$$

Dobivene vrijednosti koeficijenata A_1 i B_1 uvrštavamo u izraz (1.25):

$$x_{I1}(t) = -\frac{2F}{\omega kt_1} \sin(\omega t) + \frac{2F}{kt_1} t, \text{ te je dobiven odziv sustava u fazi I.}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti slijedi odziv i brzina odziva na kraju faze I_1 :

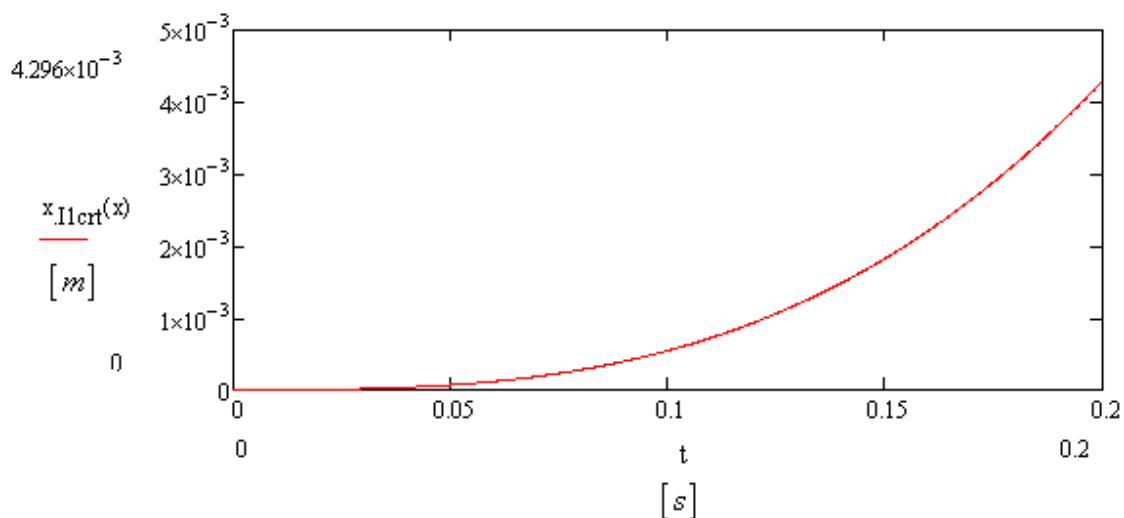
$$x_{I1}(t_1 / 2) = 0,00429 \text{ m},$$

$$\frac{dx_{I1}(t_1)}{dt} = 0,0635 \text{ m/s}.$$

Promjena odziva u fazi I_1 predložena je u dijagramu na slici 1.7.

Promjena odziva u fazi

I_1



Slika 1.7 Promjena odziva u fazi I_1

b) Proračun za drugi dio funkcije $\frac{t_1}{2} \leq t \leq t_1$

Ponavljja se isti postupak kao i pod a).

$$x_{I2}(t) = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + x_{p2}$$

Partikularni dio odziva u fazi I_2 određuje se iz diferencijalne jednačbe vibracije sustava s jednim stupnjem slobode gibanja:

$$\frac{dx_{p2}^2(t)}{dt} + \omega^2 x_{p2}(t) = \frac{F_2(t)}{k} \omega^2 \quad (1.25)$$

gdje je

$$F_2(t) = F - \frac{2F}{t_1} \left(t - \frac{1}{2} t_1 \right).$$

U ovoj fazi sustav je izložen djelovanju impulsne sile, pa se odziv određuje kao ukupno rješenje jednačbe $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ bez prigušenja, gdje je

$x_H(t)$ - homogeno rješenje jednačbe, a

$x_P(t)$ - partikularno rješenje jednačbe.

Konstane integracije A_2 i B_2 iz izraza (1.24), određuju se na osnovu početnih uvjeta i prema značajkam impulsne sile sadržanima u x_p .

Pretpostavljeno rješenje glasi: $x_{p2}(t) = a_2 t + b_2$, iz čega slijedi : (1.25 a)

$$\frac{dx_{p2}(t)}{dt} = a_2$$

$$\frac{d^2 x_{p2}(t)}{dt^2} = 0$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz (1.25) dobivene su vrijednosti koeficijenata a i b.

$$a_2 = -\frac{2F}{kt_1}$$

$$b_2 = \frac{2F}{k}$$

Koeficijenti a_2 i b_2 uvrštavaju se u izraz (1.25 a) iz čega slijedi da je :

$$x_{p2} = -\frac{2F}{kt_1} t + \frac{2F}{k}.$$

Konačno slijedi izraz : $x_{I2}(t) = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) - \frac{2F}{kt_1} t + \frac{2F}{k}.$

Kako bi odziv u fazi I uslijed djelovanja impulsne sile $x(t)$ bio u potpunosti definiran, potrebno je odrediti koeficijente A_2 i B_2 , koji se određuju iz početnih uvjeta, no ti rubni uvjeti u ovom slučaju neće biti jednaki kao i uprthodnom. Dobivaju se iz rubnih uvjeta na kraju prvog dijela tunkcije, tj u točki $t_1 / 2$, pri tome moraju biti zadovoljeni izrazi:

$$(1) x_{I1}(t_1 / 2) = x_{I2}(t_1 / 2)$$

$$(2) \frac{dx_{I1}(t_1 / 2)}{dt} = \frac{dx_{I2}(t_1 / 2)}{dt}, \text{ uz uvjet da nema prigušenja } (\xi = 0).$$

Postavljanjem sustava jednadžbi dobiju se dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice, iz kojih je moguće izračunati koeficijente A_2 i B_2 .

$$(1) -\frac{2F}{\omega kt_1} \sin(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) + \frac{2F}{kt_1} t = A_2 \sin(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) + B_2 \cos(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) - \frac{2F}{kt_1} \cdot \frac{t_1}{2} + \frac{2F}{k}$$

$$(2) -\frac{2F \cos(\omega \cdot \frac{t_1}{2})}{kt_1} + \frac{2F}{kt_1} = A_2 \omega \cos(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) - B_2 \omega \sin(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) - \frac{2F}{kt_1} \cdot \frac{t_1}{2},$$

iz čega slijedi :

$$A_2 = 0,066 \text{ m}$$

$$B_2 = -0,125 \text{ m}$$

Dobivene vrijednosti koeficijenata A_2 i B_2 uvrštavamo u izraz (1.25):

$$x_{I2}(t) = 0,066 \cdot \sin(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) - 0,125 \cdot \cos(\omega \cdot \frac{t_1}{2}) - \frac{2F}{kt_1} \cdot \frac{t_1}{2} + \frac{2F}{k}, \text{ te je dobiven drugi dio odziv}$$

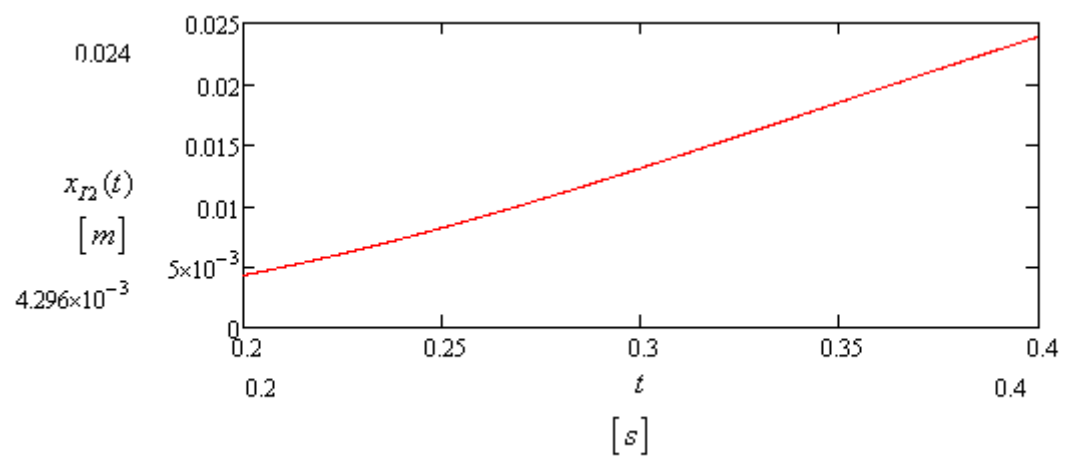
sustava u fazi I.

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti slijedi odziv i brzina odziva na kraju faze I:

$$x_{I2}(t_1) = 0,0238 \text{ m},$$

$$\frac{dx_{I2}(t_1)}{dt} = 0,103 \text{ m / s . t}$$

Promjena odziva u fazi I_2 prikazana je u dijagramu na slici 1.8.



Slika 1.8 Promjena odziva u fazi I_2

II faza:

U ovoj fazi promatra se sustav nakon prestanka djelovanja sila, uslijed čega se javljaju slobodne vibracije sustav, a odziv će ovisiti samo o početnim uvjetima u trenutku $t = t_1$.

Funkcija odziva će u ovom slučaju izgledati :

$$x_{II}(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \text{ gdje je:} \quad (1.26)$$

$$C = \frac{dx(t_1)}{\omega \cdot dt} \quad (1.27)$$

$$D = x(t_1) \quad (1.28)$$

$$x_{II \max} = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (1.29)$$

$$\tau = t - t_1 \quad (1.30)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.31)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u izraze (1.27), (1.28) i (1.29) slijedi:

$$C_2 = -\frac{0,108\omega \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{0,006018\omega \sin(\omega t)}{\omega} - \frac{2F}{\omega k t_1}$$

$$D_2 = -0,108 \cos(\omega t) + 0,006018 \sin(\omega t) - \frac{2F}{\omega k t_1} t + \frac{2F}{k}$$

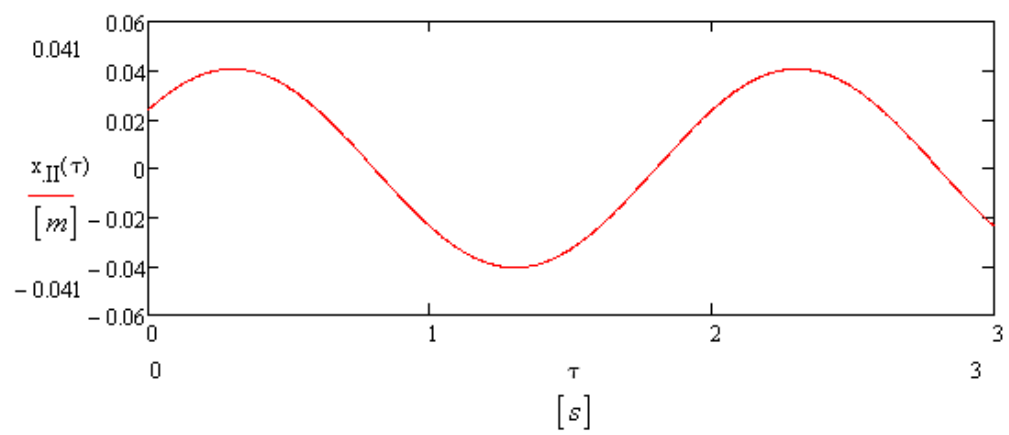
$$C = 0,033 \text{ m},$$

$$D = 0,024 \text{ m},$$

$$x_{II \max} = 0,041 \text{ m}.$$

Konačni izraz za odziv sustava u fazi II glasi :

$x_{II}(t) = 0,033 \sin(\omega t) + 0,024 \cos(\omega t)$, a odziv sustava u fazi II predložen je sljedećom slikom.



Slika 1.9 Odziv sustava u fazi II

Maksimalnu amplitudu sustava, moguće je dobiti i prema sljedećem izrazu:

$$I = \int_0^{t_1} F(t) dt . \quad (1.32)$$

Ovaj izraz predstavlja Diracovu impulsnu silu, tj. silu beskonačno kratkog trajanja ($t_1 \rightarrow 0$), ali konačnog impulsa. Bitno je naglasiti da je ovaj vremenski integral uvijek konačan, drugim riječima ako $t_1 \rightarrow 0$ tada $f(t) \rightarrow \infty$, ali njihov impuls ima konačnu vrijednost.. Vrijeme t_1 naziva se vrijeme trajanja impulsne sile, a površina ispod krivulje $f(t)$ naziva se impulsom, tj. snagom impulsne sile.

Iz izraza (1.32) dobije se vrijednost impulsa :

$I = 20 \text{ Ns}$, a iz izraza:

$$m = \frac{k}{\omega^2} , \quad (1.33)$$

slijedi da je $m = 151,98 \text{ kg}$.

Na kraju uvrštavanjem svih vrijednosti dobije se iznos maksimalne amplitude odziva , prema izrazu :

$$x_{II \max} = \frac{I}{m\omega} \quad (1.34)$$

iz čega slijedi da je:

$$x_{II \max} = 0,042 \text{ m} .$$

Iz provedenog proračuna moguće je zaključiti da je kod kratkotrajne sile dominantna faza nakon djelovanja sile. Isto tako vidljivo je da proračun preko impulsa daje samo približnu točnost, dok je kod proračuna točnog odziva dobivena točna vrijednost odziva. Razlog leži u odabiru rubnih uvjeta. Impuls sile koristan je u proračunima u kojima je potrebno znati okvirne vrijednosti maksimalnog odziva strukture, dok je za temeljite proračune pametnije koristiti dužu, ali zato i precizniju metodu točnog proračuna odziva.

3.NEPERIODSKE VIBRACIJE

3.1 Uvod

Opća neperiodička sila predstavlja s matematičkog gledišta vrlo složen izraz. U svrhu određivanja odziva sustava, silu je potrebno učiniti matematički jednostavnijom, iz tog razloga razvijena su dva načina prikaza neperiodičke sile, lit. 2:

- prikaz u vremenskom području,
- prikaz u frekvencijskom području.

U ovom proračunu sila će se promatrati u vremenskoj domeni, a proračun će biti izvršen numeričkim putem pomoću Duhamelovog integrala.

3.2 Numeričko rješenje Duhamelovog integrala

Postupak je moguće provesti na dva načina :

a) ako je funkcija sile $f(t)$ zadana analitički, te ukoliko je ista integrabilna duž svog perioda, odziv $x(t)$ je moguće dobiti integriranjem jednadžbe

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_p} \int_{\tau=0}^{\tau=t_1} f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_p(t-\tau) d\tau \quad (1.35)$$

b) ako su podaci o sili dobiveni mjerenjem i dani u obliku diskretnih vrijednosti, tada se Duhamelov integral (1.35) rješava numerički, a ne analitički.

Slijedi postupak računanja odziva $x(t)$ primjenom Duhamelovog integrala u slučaju s prigušenjem.

Primjenom teorema o zbroju trigonometrijskih funkcija slijed:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_p} \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} (\sin \omega_p t \cdot \cos \omega_p \tau - \cos \omega_p t \cdot \sin \omega_p \tau) d\tau \quad \text{ili}$$
$$x(t) = x_a(t) \sin \omega_p t - x_b(t) \cos \omega_p t \quad (1.36)$$

gdje je

$$x_a(t) = \frac{1}{m\omega_p} \int_{\tau=0}^{\tau=t_1} f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos \omega_p \tau d\tau$$
$$x_b(t) = \frac{1}{m\omega_p} \int_{\tau=0}^{\tau=t_1} f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_p \tau d\tau \quad (1.36 a)$$

Integrali (1.36 a) daju se odrediti numeričkim putem, u ovom radu je korišteno

Simpsonovo pravilo, zbog toga se os apscise podijeli na **M** jednakih vremenskih

odsječaka $\Delta \tau$, tako da je gornja granica integracije jednaka $t = M \cdot \Delta \tau$. Kod primjene Simpsonovog pravila, M mora biti paran broj. U svakom vremenskom odsječku $n \Delta \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, M$) prvo se odredi vrijednost zadane sile $f(n \Delta \tau)$, a potom podintegralne vrijednosti x_{an} i x_{bn} integrala (1.36 a) prema formuli:

$$\begin{aligned} x_{an} &= f(n \Delta \tau) \cdot e^{-\xi \omega (M-n) \Delta \tau} \cos(\omega_p n \Delta \tau) \\ x_{bn} &= f(n \Delta \tau) \cdot e^{-\xi \omega (M-n) \Delta \tau} \sin(\omega_p n \Delta \tau) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Primjenom Simpsonovog pravila izrazi (1.36 a) poprimaju oblik:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{\Delta \tau}{m \omega_p} (x_{a0} + 2x_{a1} + 2x_{a2} + \dots + 2x_{aM-1} + x_{aM}) \\ x_b(t) &= \frac{\Delta \tau}{m \omega_p} (x_{b0} + 2x_{b1} + 2x_{b2} + \dots + 2x_{bM-1} + x_{bM}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Izrazi (1.38) se uvrste u jednadžu (1.36) te se dobije vrijednost odziva u zadanom vremenskom trenutku t .

Za određivanje približne raspodjele odziva unutar vremenskog razdoblja omeđenoga trenutkom t , potrebno je izvršiti postupno integriranje do svake željene vremenske međutočke $n \Delta \tau$, gdje je zbog prirode Simpsonovog pravila n parni broj počevši od 2 do M . Postupna se integracija provodi po formulama:

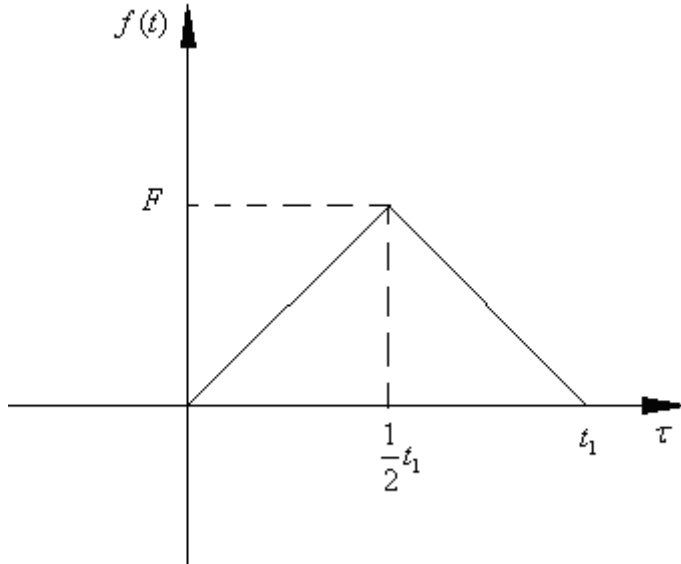
$$\begin{aligned} x_a(n \Delta \tau) &= x_a \left[(n-2) \Delta \tau \right] + \frac{\Delta \tau}{3m \omega_p} (x_{an-2} + 4x_{an-1} + x_{an}) \\ x_b(n \Delta \tau) &= x_b \left[(n-2) \Delta \tau \right] + \frac{\Delta \tau}{3m \omega_p} (x_{bn-2} + 4x_{bn-1} + x_{bn}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

te vrijednosti odziva u pojedinim među – točkama $n \Delta \tau$ prema (1.36) glasi

$$x(n \Delta \tau) = x_a(n \Delta \tau) \sin \omega_p(n \Delta \tau) - x_b(n \Delta \tau) \cos \omega_p(n \Delta \tau) \quad (1.40)$$

3.3 Analiza odziva za slučaj neperiodičkog opterećenja

Ovdje će se prikazati analiza odziva za slučaj neperiodskog opterećenja prikazanog na slici (1.10), a sam odziv će se odrediti pomoću numeričkog rješenja Duhamelovog integrala.



Slika 1.10 Neperiodsko opterećenje

Za ovaj slučaj proračun je proveden u skladu sa jednadžbama (1.36 a) i (1.37), integracija je provedena Simpsonovim pravilom. Tijek proračuna prikazan je u tablici (1.3). Raspodjela odziva unutar zadanog vremenskog intervala t kao i vrijednost odziva u trenutku t dane su u zadnjem stupcu ove tablice.

Prije proračuna, potrebno je definirati neke vrijednosti koje su potrebne za daljnji proračun.

$$\Delta\tau = \frac{1}{10}T = 0,03$$

$$M = 10$$

$$\omega = 3,14 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_p = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 3,139$$

$$\xi = 0,01$$

$$m = 25 \text{ kg}$$

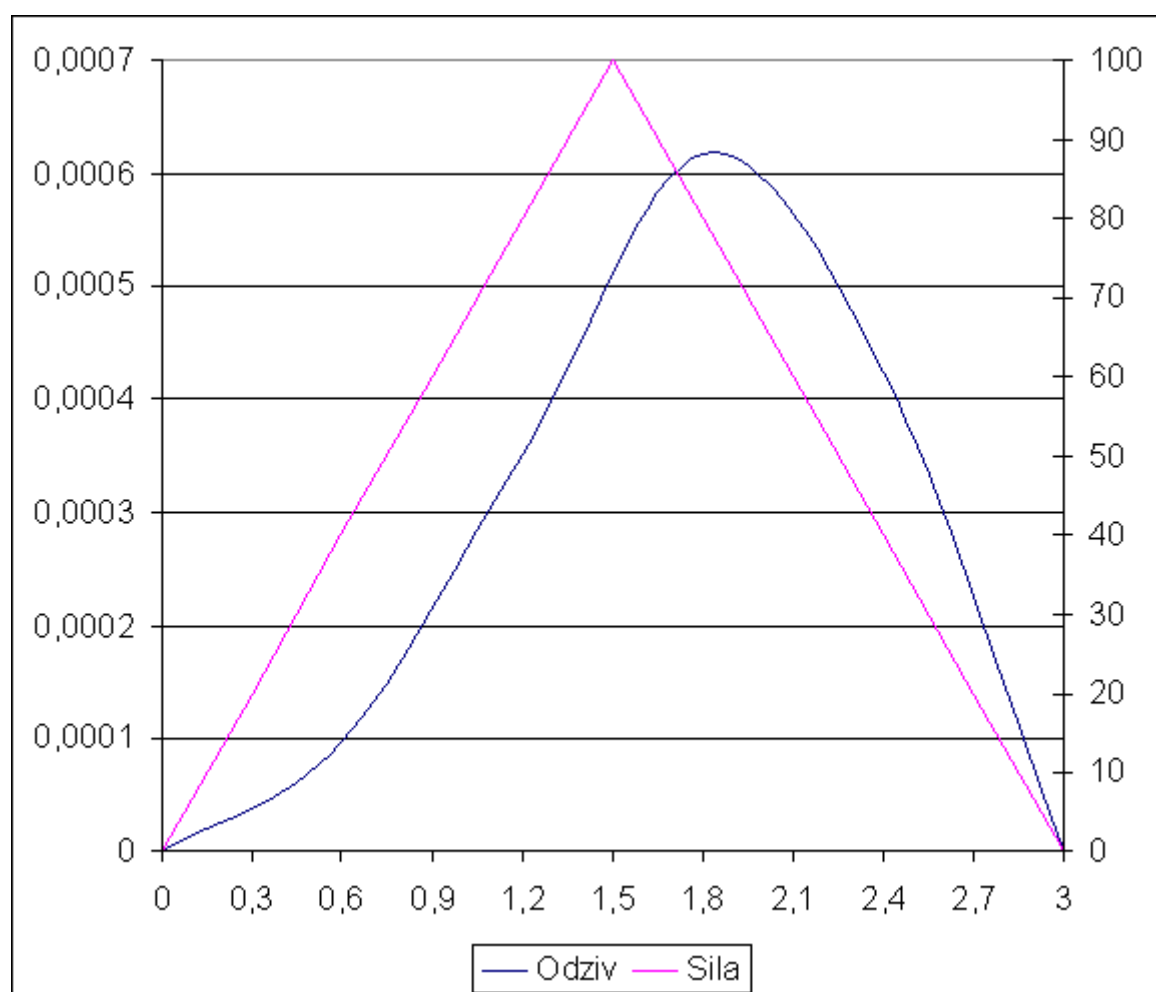
$$\omega_p \cdot \Delta\tau = 0,9419$$

$$K = \frac{\Delta\tau}{3m\omega_p} = 1,274 \cdot 10^{-3}$$

$$e^{-\xi\omega(M-n)\Delta\tau} = \frac{e^{\xi\omega\Delta\tau n}}{e^{\xi\omega\Delta\tau M}} = 0,91 \cdot e^{9,42 \cdot 10^{-3} n}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	nΔt	f(nΔt)	ωnΔt	sin(ωnΔt)	cos(ωnΔt)	$0,91 \cdot e^{0,0004^n}$	x_{an}	S	ΔX_a	$x_a(n\Delta t)$	x_{bn}	S	Δx_b	$x_b(n\Delta t)$	11×5	15×6	$16-17$	$x(n\Delta t)$
0	0	0	0	0	1	0,9103738	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0,3	20	53,80074	0,806968	0,590595	0,91896247	10,8547	4	43,41879		14,83146	4	59,32586					
2	0,6	40	107,6015	0,953183	-0,30239	0,92763216	-11,2204	1	-11,2204	0,041148	35,36812	1	35,36812	0,121015	0,039222	-0,03669	0,075816	9,63E-05
3	0,9	60	161,4022	0,318923	-0,94778	0,93638365	-53,2492	4	-212,997		17,91804	4	71,67217					
4	1,2	80	215,2029	-0,57647	-0,81712	0,94521771	-61,7881	1	-61,7881	-37,4384	-43,5915	1	-43,5915	-26,0738	21,58227	21,30531	0,276958	0,000352
5	1,5	100	269,0037	-0,99885	-0,01739	0,9541351	-1,65906	4	-6,63624		-95,3991	4	-381,596					
6	1,8	80	322,8044	-0,60454	0,796577	0,96313863	61,37697	1	61,37697	73,64335	-46,5802	1	-46,5802	-56,4991	-44,5202	-45,0059	0,485689	0,000617
7	2,1	60	376,6052	0,285775	0,958297	0,97222307	55,9007	4	223,6028		16,6702	4	66,68081					
8	2,4	40	430,4059	0,942092	0,335355	0,98139525	13,16462	1	13,16462	24,07733	36,98258	1	36,98258	66,6416	22,68306	22,34857	0,334487	0,000425
9	2,7	20	484,2066	0,827016	-0,56218	0,99065395	-11,1385	4	-44,554		16,38572	4	65,54289					
10	3	0	538,0074	0,034771	-0,9994	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Tablica 1.4 Odziv u slučaju neperiodičke sile uslijed djelovanja prigušenja



Slika 1.11 Grafički prikaz sile i odziva

4. ZAKLJUČAK

Ovaj rad sastoji se od tri dijela: analize periodskih vibracija, analize impulsnih vibracija, te analize neperiodskih vibracija.

U analizi periodskih vibracija vidljivo je da je pomoću Fourierovog reda moguće vrlo dobro opisati i najsloženije oblike sile uzbude, te je dostatno tek nekoliko harmonika da se odrede oblici sile uzbude. Što je veći broj harmonika, Fourierov red se sve više i točnije približava sili uzbude. Nakon prethodno navedene analize slijedi određivanje odziva sustava. Naravno i kod odziva vrijedi ista stvar kao i kod sile, što je više harmonika, točnost odziva je bolja. Na kraju je obrađena joiš i numerička metoda, koja je pokazala da su rezultati dobiveni matematičkom metodom točni.

U analizi impulsnih vibracija obrađena je kratkotrajna sila uzbude. Vidljivo je da je kod kratkotrajne sile uzbude, vrijeme trajanja sile vrlo kratko, odziv sustava ne stiže se razviti unutar faze djelovanja sile uzbude. Potrebno je naglasiti da približnom jednadžbom kratkotrajne sile uzbude, moguće je dobiti rezultate maksimalnog odziva koji vrlo dobro odgovaraju rezultatima maksimalnog odziva dobivenima u detaljnom proračunu.

U analizi neperiodske sile, korištena je metoda numeričkog rješenja Duhamelovog integrala. Iz zadane analitičke funkcije sile nakon provedene integracije dobiven je odziv. U ovom radu Duhamelov integral je riješen numerički Simpsonovim pravilaom. Zaključak je da prigušenje utječe na odziv na način da ga smanjuje, a raspodjela odziva prati oblik funkcije sile zadane u nekom vremenskom razdoblju.

LITERATURA

- [1] Grubišić, R.: „Teorija konstrukcija: primjeri dinamičke analize elemenata konstrukcije“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zageb, 2002
- [2] Grubišić, R.: „Dinamička opterećenja i odziv brodskih konstrukcija“, Fakultet strojarstva i brodogradnje“, Zagreb, 2007